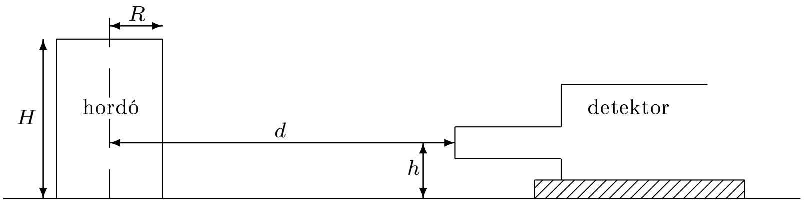
In-situ gamma-spektrometriás hordó mérések hatásfoka

Kocsy Gábor

2009. április 27.

A következőkben az 1. ábrán látható mérési geometriához tartozó detektálási hatásfokot határozzuk meg, ha a hordóban a radioaktív koncentráció homogén eloszlású.



1. ábra *Mérési elrendezés hordó méréseknél*

Szemeljünk ki egy adott energiájú fotont. Ebből a detektorunk időegység alatt

$$\Gamma = \int_V \frac{\varrho \cdot y \cdot \epsilon \cdot e^{-\mu \cdot l}}{4\pi \cdot \xi^2} \, \mathrm{d}V \tag{1}$$

darabot detektál, ahol V a hordó térfogata, ϱ a hordóban levő anyag aktivitás-koncentrációja, y a kiszemelt gamma-foton hozama, ϵ az időegység alatti beütésszám, ha a detektor felületére egységnyi fluxus esik (hatáskeresztmetszet), μ a hordóban levő anyagnak a kiszemelt fotonra vonatkozó sugárgyengítési tényezője, l a fotonnak a hordóban megtett útja, ξ pedig a foton kiinduló pontjának és a detektornak a távolsága. Nyilván y állandó, és mivel homogén aktivitás-eloszlást tételeztünk fel, ϱ is állandó. Továbbá, mivel a hordó viszonylag kis térszögben látszik, ϵ-t is állandónak vehetjük. Figyelembe véve még a hordó összaktivitására érvényes

$$A = \varrho \cdot V = \varrho \cdot R^2 \pi \cdot H,$$

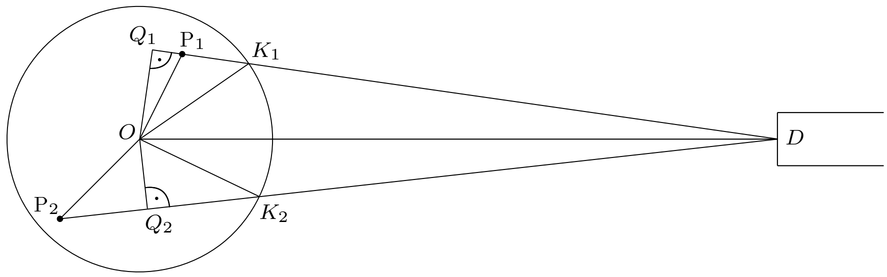
képletet, az (1) egyenletet a következőképpen írhatjuk át:

$$\Gamma = \frac{A \cdot y \cdot \epsilon}{4\pi^2 \cdot R^2 \cdot H} \cdot \int_V \frac{e^{-\mu \cdot l}}{\xi^2} \, \mathrm{d}V,$$

amiből a hatásfok:

$$\varepsilon = \frac{\Gamma}{A \cdot y} = \frac{\epsilon}{4\pi^2 \cdot R^2 \cdot H} \cdot \int_V \frac{e^{-\mu \cdot l}}{\xi^2} \, \mathrm{d}V. \tag{2}$$

Hogyan számíthatjuk ki ezt az integrált? Mivel hengerkoordináta-rendszerben szeretnénk dolgozni, ezért l-let és ξ-t először is ki kell fejeznünk hengerkoordinátákkal. Ehhez tekintsük a következő felülnézeti ábrát:



2. ábra *A mérési elrendezés felülnézetben I.*

A P_1 pontból a detektor (D pont) felé kilépő foton hordóban megtett útjának a vízszintes vetülete a P_1K_1 szakasz, amelynek hosszát jelöljük x-szel. Továbbá legyen r az OP_1 szakasz hossza (az első koordináta) és $\alpha := OP_1D\sphericalangle$. Az OK_1Q_1 derékszögű háromszögben alkalmazva a Pythagoras-tételt, azt kapjuk, hogy

$$d_{Q_1K_1} = \sqrt{R^2 - d^2_{OQ_1}}.$$

Tudjuk továbbá, hogy

$$d_{OQ_1} = r \cdot \sin(\pi - \alpha) = r \cdot \sin\alpha$$

és

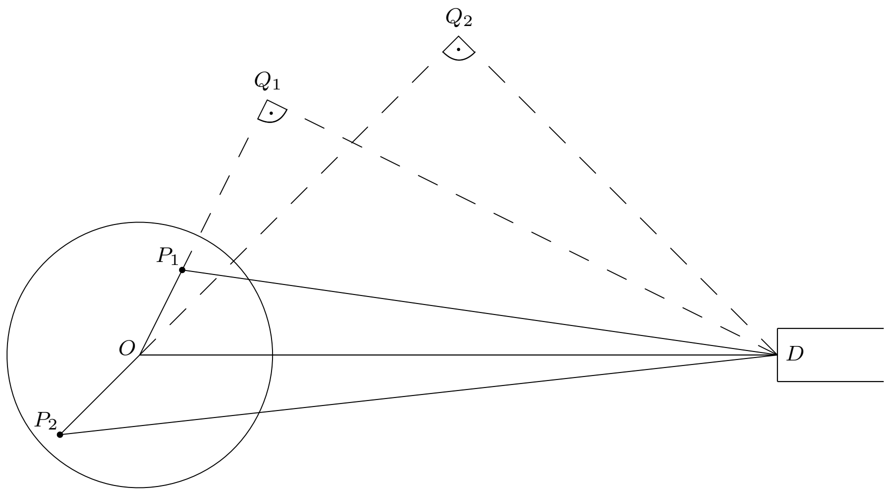
$$d_{Q_1P_1} = r \cdot \cos(\pi - \alpha) = -r \cdot \cos\alpha.$$

Ezek után x-re a következő egyenlet adódik:

$$x = \sqrt{R^2 - r^2 \cdot \sin^2\alpha} + r \cdot \cos\alpha.$$

Ugyanerre az összefüggésre jutunk akkor is, ha $\alpha < \pi/2$ (lásd P_2 pont).

Ki kell még fejeznünk $\cos\alpha$-t és $\sin\alpha$-t hengerkoordinátákkal. Ebben segít a 3. ábra:



3. ábra *A mérési elrendezés felülnézetben II.*

Világos, hogy $d_{OD} = d$. Jelölje η a P_1 és D pontok távolságát, és legyen $\varphi := DOP_1\sphericalangle$ (a második koordináta). Az ODP_1 háromszögben alkalmazva a koszinusz-tételt, azt kapjuk, hogy

$$\eta = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi}.$$

Továbbá a P_1Q_1 szakaszra a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$d_{P_1Q_1} = \eta \cdot \cos(\pi - \alpha) = d \cdot \cos\varphi - r,$$

amiből

$$\cos\alpha = \frac{r - d \cdot \cos\varphi}{\eta}.$$

A Q_1D szakaszra vonatkozó hasonló összefüggésből kapjuk, hogy

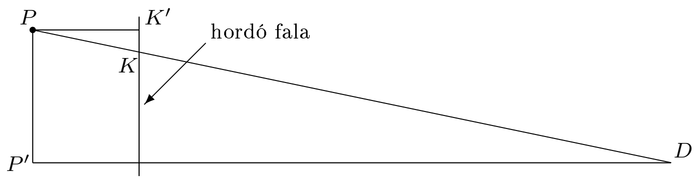
$$\sin\alpha = \frac{d \cdot \sin\varphi}{\eta}.$$

Ugyanezekre az összefüggésekre jutunk akkor is, ha $\alpha < \pi/2$ (lásd P_2 pont).

Ezek után már fel tudjuk írni x-et hengerkoordináták segítségével:

$$x = \sqrt{R^2 - \left(\frac{r \cdot d \cdot \sin\varphi}{\eta}\right)^2} + r \cdot \frac{r - d \cdot \cos\varphi}{\eta}.$$

Ez azonban még csak a hordóban megtett út vízszintes vetülete. A foton hordóban megtett teljes útjának a meghatározásához nézzük a következő oldalnézeti ábrát:



4. ábra *A mérési elrendezés oldalnézetben*

A hordóban megtett teljes út a PK szakasz, amelynek hossza tehát l. Világos továbbá, hogy $x = d_{PK'}$, $\eta = d_{P'D}$ és $\xi = d_{PD}$. Legyen $z := d_{P'P}$ (a harmadik koordináta). Ezzel $\xi = \sqrt{z^2 + \eta^2}$. A PKK' és a $PP'D$ háromszög hasonló, ezért

$$\frac{l}{x} = \frac{\sqrt{z^2 + \eta^2}}{\eta},$$

amiből

$$l = \frac{x}{\eta} \cdot \sqrt{z^2 + \eta^2}.$$

Most már ki tudjuk fejezni a keresett integrálban szereplő változókat hengerkoordinátákkal, így numerikusan ki is tudjuk számolni az integrált. Azt jegyezzük csak meg, hogy a z változó -h-tól $(H - h)$-ig fut, a φ változó pedig csak 0-tól π-ig, hiszen a henger két fele szimmetrikus. Tehát

$$\int_V \frac{e^{-\mu \cdot l}}{\xi^2} \,\mathrm{d}V = 2 \cdot \int_{-h}^{H-h} \int_0^R \int_0^\pi \frac{e^{-\mu \cdot l}}{\xi^2} \; r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z.$$

Ezzel a hatásfokra vonatkozó (2) egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\varepsilon = \frac{\epsilon}{2\pi^2 \cdot R^2 \cdot H} \cdot \int_{-h}^{H-h} \int_0^R \int_0^\pi \frac{e^{-\mu \cdot l}}{\xi^2} \; r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z.$$